ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 33, No. 1, 1979

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES L^2-RESOLVANTES

PAR
RADU ZAHAROPOL

ABSTRACT

Cet article a deux parties. Dans la première nous allons étudier les normes des opérateurs d'une L^2-résolvante. Dans la deuxième partie on va associer à chaque L^2-résolvante $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ un processus $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ (l'idée de considérer ce processus appartient à I. Cuculescu). En ce qui concerne ce processus $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ on va montrer que si $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ est une L^2-résolvante qui correspond à un espace de Dirichlet fortement régulier sur $(E, \mathscr{B}, \mu)$ où E est un espace métrique compact, $\mathscr{B}$ est le corp borélien engendré par les ouverts de E et μ est une probabilité (ou une mesure finie), alors l'ensemble des zeros de chaque f_α est un ensemble fermé avec l'intérieur vide.

I. Les opérateurs d'une L^2-résolvante et leurs normes

Soit $(E, \mathscr{B})$ un espace mesurable et μ une mesure σ-finie, $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ une L^2-résolvante et (X, H) l'espace de Dirichlet associé (voir [3]).

Nous allons noter par $\|\quad\|$ la norme canon sur $L^2(\mu)$ et par $\|\quad\|_\alpha$ la norme induite par le produit scalaire

$$H_\alpha(x, y) = H(x, y) + \alpha\langle x, y\rangle \quad \text{sur } X.$$

Alors $(G_{\alpha|X})_{\alpha>0}$ (considérés comme des opérateurs définis sur X) sont des opérateurs symétriques (c'est à dire $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$, $H_\alpha(G_\beta x, y) = H_\alpha(x, G_\beta y)$) parce que

$$H_\alpha(G_\alpha x, y) = \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = H_\alpha(G_\alpha y, x) = H_\alpha(x, G_\alpha y).$$

Nous avons encore que $(G_{\alpha|X})_{\alpha>0}$ sont des injections parce que $H_\alpha(G_\alpha x, x) = \langle x, x\rangle$ et donc $G_\alpha x = 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Les opérateurs $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ ont encore la propriété que pour chaque $\alpha > 0$, $G_\alpha(X)$

Received November 17, 1977

est partout dense dans X par rapport à la norme induite par H_α. Cette proposition est vraie parce que, si nous noterons avec $\overline{G_\alpha(X)}^{H_\alpha}$ l'adhérence de $G_\alpha(X)$ par rapport à la topologie induite par H_α et si nous noterons encore avec $\perp_\alpha$ l'orthogonalité par rapport au produit scalaire H_α, alors pour $u \in (\overline{G_\alpha(X)}^{H_\alpha})^{\perp_\alpha}$ on obtient que $H_\alpha(G_\alpha v, u) = 0 \ \forall v \in X$ et donc $H_\alpha(G_\alpha u, u) = \langle u, u\rangle = 0$ c'est à dire que $u = 0$ et donc $G_\alpha(X)$ est dense dans X par rapport à H_α.

Notre but dans la suite sera l'étude des relations entre les normes des opérateurs $(G_\alpha)_\alpha$ considérés comme des opérateurs définis sur $L^2(\mu)$ et $(G_{\alpha|X})_\alpha$ (considérés comme des opérateurs définis sur X).

Proposition 1. *Si* (X, H) *a la propriété qu'il existe* $x \neq 0$, $x \in X$ *tel que* $H(x, x) = 0$ *alors*

(a) $\|G_\alpha\|_\alpha = 1/\alpha$,

(b) $\|G_\alpha\| = 1/\alpha$.

Démonstration.

(a)
$$\|G_\alpha\|_\alpha = \sup_{\|x\|_\alpha=1} H_\alpha(G_\alpha x, x) = \sup_{\|x\|_\alpha^2=1} \langle x, x\rangle$$
$$= \sup_{H(x,x)+\alpha\langle x,x\rangle=1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} H(x, x)\right).$$

Soit x_0 avec $H(x_0, x_0) = 0$ et $x_0 \neq 0$. Nous allons noter $k = \|x_0\|_\alpha$. Alors $y = x_0/k$ a la propriété que $\|y\|_\alpha = 1$ et $H(y, y) = 0$. On obtient que $\|G_\alpha\|_\alpha \geqq 1/\alpha$.

Mais parce que H est une forme bilinéaire positivement définie, il en résulte que $\|G_\alpha\|_\alpha \leqq 1/\alpha$ et donc $\|G_\alpha\|_\alpha = 1/\alpha$.

(b)
$$\|G_\alpha\| = \sup_{\substack{\|x\|^2=1\\ x\in L^2(\mu)}} \langle G_\alpha x, x\rangle \geqq \sup_{\substack{\|x\|^2=1\\ x\in X}} \langle G_\alpha x, x\rangle$$
$$= \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X}}\left(\frac{1}{\alpha} H_\alpha(G_\alpha x, x) - \frac{1}{\alpha} H(G_\alpha x, x)\right) = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X}}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} H(G_\alpha x, x)\right).$$

Mais par l'hypothèse on sait qu'il existe $y \neq 0$ tel que $H(y, y) = 0$ et donc on obtient qu'il existe x avec $\|x\| = 1$ et tel que $H(x, x) = 0$. Mais H est une forme bilinéaire et donc $H(G_\alpha x, x) = 0$ d'où il en résulte que $\|G_\alpha\| \geqq 1/\alpha$. Mais $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ est une L^2-résolvante et donc on sait que $\|G_\alpha\| \leqq 1/\alpha$. On obtient que $\|G_\alpha\| = 1/\alpha$ et la proposition est démontrée.

Proposition 2. *Soit* $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ *une* L^2*-résolvante qui a la propriété que* $\forall \alpha > 0$,

G_α est opérateur compact (c'est à dire qu'il transforme des ensembles bornés dans des ensembles relatifs compacts). Alors $\|G_\alpha\|_\alpha = 1/\alpha \Leftrightarrow (\exists)x \neq 0$ *avec* $H(x,x) = 0$.

DÉMONSTRATION.
$\Leftarrow$: c'est un cas particulier de la Proposition 1.
$\Rightarrow$:

$$\|G_\alpha\|_\alpha = \sup_{\|x\|_\alpha = 1} H_\alpha(G_\alpha x, x) = \sup_{H(x,x)+(1/\alpha)(x,x)=1} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} H(x,x)\right) = \frac{1}{\alpha}.$$

On obtient qu'il existe une suite $(x_n)_n$ avec $x_n \in X$ et $\|x_n\|_\alpha = 1$ tel que $H(x_n, x_n) \to 0$ et donc $\langle x_n, x_n \rangle \to 1/\alpha$, c'est à dire que $(x_n)_n$ est une suite bornée dans la norme canon sur $L^2(\mu)$.

Mais parce que G_α est compact il résulte qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ avec la propriété que $(G_\alpha x_{n_k})_k$ est Cauchy dans $L^2(\mu)$. Dans ces conditions:

$$\begin{aligned} H_\alpha(G_\alpha(x_{n_k} - x_{n_{k'}}), G_\alpha(x_{n_k} - x_{n_{k'}})) &= \langle x_{n_k} - x_{n_{k'}}, G_\alpha(x_{n_k} - x_{n_{k'}})\rangle \\ &\leqq \frac{2}{\alpha}\|G_\alpha(x_{n_k} - x_{n_{k'}})\| \to 0 \end{aligned}$$

parce que $\|x_n\| \leqq (1/\alpha)\|x_n\|_\alpha = 1/\alpha$.

Nous avons obtenu que $(G_\alpha(x_{n_k}))_k$ est Cauchy relativement à la norme H_α et

$$H_\alpha(G_\alpha(x_{n_k} - x_{n_{k'}}), x_{n_k} - x_{n_{k'}}) \leqq 2\|G_\alpha(x_{n_k} - x_{n_{k'}})\|_\alpha \to 0,$$

c'est à dire que $\|x_{n_k} - x_{n_{k'}}\| \to 0$ et donc $(x_{n_k})_k$ est Cauchy relativement à la norme canon et à la norme H_α, d'où on obtient qu'il existe $x \in X$ avec $x_{n_k} \xrightarrow{L^2} x$, $x_{n_k} \xrightarrow{H_\alpha} x$ et $\|x\|_\alpha = 1$.

C'est à dire que $H(x,x) + \alpha\langle x,x\rangle = 1$ et donc $H(x,x) = 1 - \alpha\langle x,x\rangle = 1 - \alpha \lim_n \langle x_n, x_n\rangle = 0$ et la proposition est démontrée.

OBSERVATION. Si $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ est une L^2-résolvante et il existe α_0 tel que G_{α_0} soit opérateur compact, il résulte que $\forall\alpha$, G_α est opérateur compact (parce que $\forall\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$, $G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta)G_\alpha G_\beta = 0$).

Soit maintenant E un espace topologique localement compact, Hausdorff et séparable, $\mathscr{B}$ la tribu engendrée par les ouverts et μ une mesure de Radon.

Nous allons noter

$$\mathscr{C}(E) = \{f : E \to R/f \text{ continue et } \forall\varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ partie compacte tel que } f_{\complement K_\varepsilon} \leqq \varepsilon\}$$

et avec $\mathscr{C}_0(E)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact.

PROPOSITION 3. *Soit (X, H) un espace de Dirichlet régulier sur $(E, \mathcal{B}, \mu)$ où E est un espace métrique compact et μ est une probabilité (éventuellement une mesure finie) et soit $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ la L^2-résolvante qui correspond à (X, H). Alors $\|G_\alpha\|_\alpha = 1/\alpha$ $\Rightarrow$ $\|G_\alpha\| = 1/\alpha$.*

DÉMONSTRATION. (X, H) est un espace de Dirichlet régulier et donc $X \cap \mathcal{C}(E)$ est dense dans $\mathcal{C}(E)$ par rapport à la norme uniforme, d'où on obtient que $X \cap \mathcal{C}(E)$ est dense dans $\mathcal{C}(E)$ par rapport à la norme canon sur $L^2(\mu)$, donc $X \cap \mathcal{C}(E)$ est dense dans $L^2(\mu)$ par rapport à la norme canon sur $L^2(\mu)$ et donc X est dense dans $L^2(\mu)$ par rapport à la norme canon sur $L^2(\mu)$.

Mais parce que $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ sont des opérateurs continus et X est dense dans $L^2(\mu)$ on obtient que:

$$\|G_\alpha\| = \sup_{\substack{x \in L^2(\mu) \\ \|x\| \leq 1}} \langle G_\alpha x, x\rangle = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|^2 \leq 1}} \langle G_\alpha x, x\rangle \geqq \sup_{H_\alpha(x,x) \leq \alpha} \langle G_\alpha x, x\rangle$$

$$= \alpha \sup_{H_\alpha(y,y) \leq 1} \langle G_\alpha y, y\rangle = \alpha \sup_{H_\alpha(y,y) \leq 1} H_\alpha(G_\alpha y, G_\alpha y) = \alpha \|G_\alpha\|_\alpha^2.$$

Mais $\|G_\alpha\|_\alpha = 1/\alpha$, d'où on obtient que $\|G_\alpha\| \geqq 1/\alpha$ et donc $\|G_\alpha\| = 1/\alpha$.
La démonstration de cette proposition nous donne le suivant corollaire:

COROLLAIRE. *Dans les conditions ci-dessus on obtient que $\|G_\alpha\| \geqq \alpha \|G_\alpha\|_\alpha^2$.*

II. La construction du processus $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ et ses propriétés

Soit maintenant $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace probabilisé où E est un espace métrique compact et $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par les ouverts.

Soit $(G_\alpha)_\alpha$ une L^2-résolvante sur $L^2(\mu)$. Pour chaque $\alpha > 0$ et $A \in \mathcal{B}$ nous allons définir $\mu_\alpha(A) = \int G_\alpha \chi_A d\mu$.

Alors $\mu_\alpha : \mathcal{B} \to R$ est une mesure positive finie et $\mu_\alpha \ll \mu$. En usant le théorème de Radon–Nikodym pour chaque $\alpha > 0$, on obtient qu'il existe (pour chaque $\alpha > 0$) une fonction μ-intégrable f_α tel que $\mu_\alpha = f_\alpha \mu$.

Nous allons dire que $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ est le processus attaché à la L^2-résolvante $(G_\alpha)_{\alpha>0}$.

PROPOSITION 4.

(a) *Pour chaque $u \in L^2(\mu)$ on a $\int G_\alpha u d\mu = \int f_\alpha u d\mu$.*

(b) $f_\alpha = G_\alpha \chi_E$.

DÉMONSTRATION.

(a) est évident (on vérifie la formule pour u fonction $\mathcal{B}$-étagée et puis pour $u \in L^2(\mu)$ quelconque).

(b) $\mu_\alpha(A) = \int G_\alpha \chi_A d\mu = \int_A f_\alpha d\mu$.

Pour $B \in \mathcal{B}$ on obtient que

$$\int_B G_\alpha \chi_A d\mu = \int \chi_B G_\alpha \chi_A d\mu = \int \chi_A G_\alpha \chi_B d\mu \leqq \int G_\alpha \chi_B d\mu = \int_B f_\alpha d\mu,$$

c'est à dire que $G_\alpha \chi_A \leqq f_\alpha \mu$-presque partout.

Mais $\int G_\alpha \chi_E d\mu = \int f_\alpha d\mu$ et donc on obtient que $f_\alpha = G_\alpha \chi_E$ μ-presque partout, c'est à dire $f_\alpha = G_\alpha \chi_E$ (dans $L^2(\mu)$).

OBSERVATIONS.

(1) En usant la proposition 4, paragraphe (b) on obtient que $f_\alpha \in L^2(\mu)$ et d'avantage $f_\alpha \in X$.

(2) Si $\forall \alpha > 0$, $G_\alpha(\mathcal{C}(E)) \subseteq \mathcal{C}(E)$ alors de la même proposition et le même paragraphe il en résulte que $f_\alpha \in \mathcal{C}(E)$.

(3) Si $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ est une L^2-résolvante et $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ est son processus attaché, alors pour $\alpha > \beta$ il en résulte que $f_\alpha \leqq f_\beta$ μ-presque partout parce que pour $\forall A \in \mathcal{B}$

$$\int_A f_\alpha d\mu - \int_A f_\beta d\mu + (\alpha - \beta) \int G_\alpha G_\beta \chi_A d\mu = 0.$$

Soit $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ une L^2-résolvante et $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ son processus attaché. Alors nous noterons $\Gamma^\alpha = \{x \in E \mid f_\alpha(x) = 0\}$ et nous allons remarquer que pour $\forall \alpha, \beta > 0$ on a $\Gamma^\alpha = \Gamma^\beta$. Nous écrivons Γ pour Γ^α.

Supposons maintenant que (X, H) est un espace de Dirichlet fortement régulier (strongly regular), $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ la L^2-résolvante qui correspond à cet espace et $(G_\alpha(x, A))_{\alpha>0}$ la L^2-résolvante de type Ray associée.

PROPOSITION 5.

(a) *$G_\alpha(x, \cdot)$ est la mesure partout nulle si et seulement si $x \in \Gamma$.*

(b) *Si $u \in \mathcal{C}(E)$ et $x \in \Gamma \Rightarrow G_\alpha u(x) = 0$.*

DÉMONSTRATION.

(a) en résulte du fait que dans ce cas $f_\alpha(x) = G_\alpha \chi_E(x) = G_\alpha(x, E)$.

(b) en résulte du (a) et parce que $G_\alpha u(x) = \int u(y) G_\alpha(x, dy)$.

COMMENTAIRES. Le processus $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ attaché à la L^2-résolvante de type Ray a la propriété qu'il est formé avec des fonctions continues, il est partout décroissant (c'est à dire qu'il a tous les trajectoires décroissantes) et ses trajectoires sont continues parce que

$$|f_\alpha(x)-f_{\alpha_0}(x)| = |G_\alpha\chi_E(x)-G_{\alpha_0}\chi_E(x)| \leqq \frac{|\alpha-\alpha_0|}{\alpha\alpha_0} \xrightarrow[\alpha\to\alpha_0]{} 0.$$

D'avantage, le processus $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ a des trajectoires dérivables et

$$\frac{df_\alpha(x)}{d\alpha} = -(G_\alpha f_\alpha)(x).$$

Pour $\alpha_0>0$ fixé, le processus $(f_\alpha)_{\alpha\geqq\alpha_0}$ est un potentiel, de plus un potentiel de classe D par rapport à la base stochastique

$$\mathscr{F}_\gamma = \mathscr{F}(f_\alpha \mid \alpha_0 \leqq \alpha \leqq \gamma).$$

PROPOSITION 6. *Si (X,H) est un espace de Dirichlet fortement régulier alors l'ensemble Γ a l'intérieur vide.*

DÉMONSTRATION. Nous allons considérer la fonction Cap telle qu'elle a été définie dans [2].

Nous allons remarquer que dans le cas des espaces compacts, la fonction Cap a seulement des valeurs finies parce que l'ensemble C_1 attaché à la résolvante de type Ray a la propriété qu'il existe $u_1, u_2, \cdots, u_n \in C_1$ tel que $\Sigma_{i=1}^n u_i(x)>0$, $\forall x\in E$ et $\Sigma_{i=1}^n u_i$ est une fonction continue strictement positive sur un compact, donc multipliée par un nombre réel convenablement choisi nous allons obtenir une fonction continue u tel que $u(x)\geqq 1$, $\forall x\in E$.

Le fait que $\mathscr{C}(E)$ est dense dans $L^2(\mu)$ nous donne que $G_\alpha(\mathscr{C}(E))$ est dense dans X par rapport à la norme H_α et de la proposition 5 il en résulte que pour chaque fonction continue u on a que $G_\alpha u(x)=0$, $\forall x\in\Gamma$ et donc on obtient que chaque $u\in X$ a la propriété que $u=0$ μ-presque partout sur Γ (parce que la convergence dans la norme H_α implique la convergence dans $L^2(\mu)$ et donc la convergence μ-presque partout).

Supposons que Γ n'a pas l'intérieur vide. Alors, du fait que μ est partout dense, on obtient que

$$\mathscr{L}_\Gamma = \{f \mid f\in X, f\geqq 1 \ \mu\text{-presque partout sur } \Gamma\} = \emptyset$$

et donc $\operatorname{Cap}\Gamma = +\infty$ c'est à dire une contradiction avec le fait que Cap a seulement des valeurs finies et donc la proposition est démontrée.

Nous allons remarquer le fait qu'on peut donner une autre démonstration à cette dernière proposition sans employer la fonction Cap.

PROPOSITION 7. $\mu(\Gamma) = 0$.

DÉMONSTRATION. E compact et $C_1 \subset X$ implique le fait qu'il existe une fonction continue $u \in X$ (dans le sens que sa classe appartient à X) ayant la propriété que $u(x) > 0$, $\forall x \in E$.

Mais $G_\alpha(\mathscr{C}(E))$ est dense dans X par rapport à la norme induite par H_α et donc il existe une suite $(G_\alpha v_n)_n$ avec $G_\alpha v_n \xrightarrow{H_\alpha} u$ et donc $G_\alpha v_n \to u$ μ-presque partout.

Il en résulte que $u = 0$ μ-presque partout sur Γ.

Mais $u > 0$ partout sur E et donc nous allons obtenir que $\mu(\Gamma) = 0$.

COROLLAIRE. *Γ a l'intérieur vide parce que μ est partout dense.*

OBSERVATION. Dans la proposition 7, nous n'avons pas user le fait que μ est partout dense, donc $\mu(\Gamma) = 0$ même si nous n'utiliserons pas cette axiome dans la définition des espaces de Dirichlet fortement réguliers.

Pour conclure, dans le cas des espaces de Dirichlet fortement réguliers Γ est un ensemble fermé avec l'intérieur vide.

BIBLIOGRAPHIE

1. Masatoshi Fukushima, *Regular representations of Dirichlet spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **155** (1971), 455–473.

2. Masatoshi Fukushima, *Dirichlet spaces and strong Markov processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 185–224.

3. T. Shiga et T. Watanabe, *On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion*, Osaka J. Math. **5** (1968), 1–33 (MR 39 # 7676).

INSTITUTE OF MATHEMATICS
THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM
JERUSALEM, ISRAEL